Topologia
Lista 1 (przestrzenie metryczne)

Zad 1. Sprawdzić, czy funkcja $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest metryką na $\mathbb{R}$, gdzie

$$a)\ d(x,y) = |x| + |y|, \qquad b)\ d(x,y) = |x| \cdot |y|, \qquad c)\ d(x,y) = |x-y|^2.$$

Zad 2. Dla jakich odwzorowań $f : X \to \mathbb{R}$ funkcja $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dana wzorem $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ jest metryka w X?

Zad 3. Sprawdzić, czy funkcja $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $d(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$, $m, n \in \mathbb{N}$, jest metryką w $\mathbb{N}$. Jeśli tak, to jak wyglądają kule $K_1(1)$, $K_{\frac{1}{2}}(1)$ oraz $K_{\frac{1}{2}}(3)$ w tej metryce.

Zad 4. Pokazać, że jeśli (X,d) jest przestrzenią metryczną, to metrykami są również funkcje

$$d_1(x,y) = a \cdot d(x,y),\ a > 0, \qquad d_2(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}, \qquad d_3(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}.$$

Pokazać, że metryki te wprowadzają na X tą samą rodzinę zbiorów otwartych, co wyjściowa metryka d.

Zad 5. Uzasadnić, że następujące funkcje na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ są metrykami:

$$d_e(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} \qquad (\textit{metryka euklidesowa}),$$
$$d_t(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| \qquad (\textit{metryka taksówkowa}),$$
$$d_m(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} \qquad (\textit{metryka maximum}),$$
$$d_w(x,y) = \sqrt{|x_1-y_1|} + \sqrt{|x_2-y_2|} \qquad (\textit{metryka „wklęsła”}),$$

gdzie $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Wyznaczyć postać kul otwartych dla tych metryk oraz pokazać, że wprowadzają one na $\mathbb{R}^2$ tę samą rodzinę zbiorów otwartych.

Zad 6. Uzasadnić, że następujące funkcje są metrykami na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Są to odpowiednio tzw. *metryka studni* oraz *metryka rzeki*:

$$d_s(x,y) = \begin{cases} d_e(x,y), & \text{gdy } x, y \text{ leżą na tej samej prostej} \\ & \text{przechodzącej przez punkt } (0,0), \\ d_e(x,(0,0)) + d_e(y,(0,0)), & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

$$d_r(x,y) = \begin{cases} |x_2-y_2|, & \text{gdy } x_1 = y_1 \\ |x_1-y_1| + |x_2| + |y_2|, & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

gdzie $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ oraz d_e jest metryką euklidesową. Wyznaczyć postać kul otwartych oraz podać interpretacje „topologiczne” dla tych metryk.

Zad 7. Niech d_d metryką dyskretną na prostej $\mathbb{R}$. Pokazać, że funkcja

$$d_g\big((x_1,x_2)(y_1,y_2)\big) = |x_1-y_1| + d_d(x_2,y_2)$$

jest metryką na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ oraz wyznaczyć postać kul w tej metryce. Dlaczego można by ją nazwać *metryką stoku górskiego*?

Zad 8. Uogólnić powyższe zadanie, pokazując, że dla dowolnych dwóch przestrzeni metrycznych (X_1, d_1), (X_2, d_2) na iloczynie kartezjańskim $X_1 \times X_2$ funkcja

$$d\big((x_1,x_2)(y_1,y_2)\big) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$$

zadaje metrykę. Jak wyglądają kule w tej przestrzeni, jeśli $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ i $d_1 = d_2 = d_e$?